ANALISIS PEMBUKTIAN FORMULA DERET HINGGA BILANGAN ASLI PANGKAT r MENGGUNAKAN INDUKSI DAN DEDUKSI MATEMATIKA (Kajian Literasi Kontribusi Matematikawan Muslim Abad Pertengahan)

Soekardi Hadi Prabowo
Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi
Universiatas Islam As-Syafi'iyah Jakarta
Email : sh.prabowo59@gmail.com

ABSTRAK

Makalah ini membahasi pembuktian lemma terkait Formula ringkasan Deret Hingga Bilangan Asli pangkat r, dengan r bilangan Bulat Positif antara 1 sampai 4 .Hasil penemuan Ibn Haytham, matematikawan Muslim dari Basrah Irak pada abad ke-11 Masehi. Metode Penelitian ini merupakan kajian Pustaka untuk mempelajari dan mendalami informari mengenai permasalah yang ada, secara teknis dimulai dengan mengkonstruksi lemma model deret Hingga Bilangan Asli pangkat r penemuan Ibn Al Haytham, dengan proses pembuktian bilangan bulat r dari 1 sampai 3 menggunakan pendekatan Induksi matematika dan khusus untuk pangkat 4 diawali dengan pembuktian menggunakan pendekatan induksi matematika, dilanjutkan dengan pendekatan Deduksi. Materi dalam penelitian ini berupa buku teks, jurnal jurnal terdahulu sebagai rujukan dan sumber laiinya yang memuat dan membahas Deret Hingga bilangan asli, konsep penjabaran Koefisien Binomial penemuan al-Karaji, teorema Kombinasi , Induksi matematika dan pendekatan deduksi menggunakan metode pembuktian langsung, berbasis Identitas penjumlahan menurun notasi Sigma berkaitan dengan binomium pangkat lima serta literasi kontribusi matematikanwan muslim. Hasil penelitian menunjukkan bahwa pembuktian Deret hingga Bilangan asli pangkat r , sampai dengan tingkat empat hasil penemuan matematikawan Muslim Ibn Haitham menggunakan metode Induksi matematika dapat terbukti kebenarannya dengan dengan baik, dengan pendekatan Induktif matematika lebih efektif dan efisien dibandingkan dengan pendekatan deduktif berbasis metode penbuktian langsung serta kontribusi matematikawan muslim abad pertengahan pada proses pembuktian berpengaruh dan memegang peran penting dalam sejarah perkembangan matematika modern saat ini serta oleh kalangan matematikawan di kawasan Eropa (matematikan Barat).

Kata Kunci : Deret Hingga bilangan Asli, pendekatan Induktif-Deduktif.

ABSTRACT

This paper discusses the proof of the lemma related to the summary formula of the Finite Series of Original Numbers to the power of r, with r a Positive Integer between 1 and 4. The invention of Ibn Haytham, a Muslim mathematician from Basrah Iraq in the 11th century AD. This research method is a library study to study and explore information about the existing problems, technically starting with constructing the lemma of the Finite series model of Original Numbers to the rank of r invented by Ibn Al Haytham, with the process of proving integers r from 1 to 3 using the mathematical induction approach and specifically for rank 4 starting with proof using the mathematical induction approach, followed by the Deduction approach. The material in this research is in the form of textbooks, previous journals as references and other sources that contain and discuss the Finite Series of natural numbers, the concept of explaining the Binomial Coefficient of al-Karaji's discovery, the Combination theorem, mathematical induction and deduction approaches using direct proof methods, based on the Identity of the sum decreasing Sigma notation related to the binomium of the fifth power and literacy contributions of Muslim mathematicians. The results showed that the proof of the series up to the original number of powers of r, up to the fourth degree of the invention of the Muslim mathematician Ibn Haitham using the method of mathematical induction can be proven to be correct properly, with the mathematical inductive approach more effective and efficient than the deductive approach based on the direct proof method and the contribution of medieval Muslim mathematicians to the proof process influences and plays an important role in the history of the development of modern mathematics today as well as by mathematicians in the European region (Western mathematics).

Keywords: Finite series of natural numbers, Inductive-Deductive approach

PENDAHULUAN

Pembuktian memegang peranan dan merupakan bagian yang mutlak serta mendasar dalam matematika dan menjadi bagian yang tidak terpisahkan dari matematika (Moshovitz, et.all, 2001 : 99). Sedangkan Kemampuan Pembuktian Matematika merupakan kemampuan memahami pernyataan atau simbol matematika serta menyusun bukti kebenaran suatu suatu pernyataan secara matematika.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2000 : 56) menyebutkan “mathematical reasoning and proof offer powerful ways of developing and expressing insights about a wide range of phenomena and ultimately, a mathematical proof is a formal way of expressing particular kinds of reasoning and justification’. Artinya adalah penalaran dan pembuktian matematika manawarkan cara ampuh untuk mengembangkan dan mengekspresikan wawasan tentang berbagai fenomena.

Pembuktian yang menggunakan penalaran deduktif di antaranya dapat dilakukan secara aturan inferensi diantaranya menggunakan metode Induksi matematika, bukti tidak langsung dan bukti langsung (Nahrowi, Adjie. 2006 : 24).

Makalah ini secara khusus mengkaji Analisis pembuktian Formula jumlah barisan (dikenal dengan istilah Deret) Hingga bilangan asli pangkat r, berbentuk formula disajikan dalam teorema sebagai berikut

Teorema.1 deret hingga bilangan asli pangkat r dinyatakan dengan notasi S_n dan dirumuskan

$$S_n = 1^r + 2^r + 3^r + \cdots + n^r$$

Penulisan Teorema 1 di atas secara ringkas dapat disajikan dalam bentuk notasi Sigma ($\sum$), dimana operasi yang melibatkan notasi sigma biasanya pada Bilangan yang memenuhi pola tertentu, dan disajikan dalam Teorema 2 berikut ini

Teorema 2 Penulisan Singkat Deret Hingga Bilangan Asli Pangkat r

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} i^r , r = 1, 2, \dots , t$$

untuk r = 1, 2, 3,4 pada teorema.2 dijelaskan .oleh Rozhanskaya, et.all, pada tahun1982 M dalam buku karyanya “ *Ibn Al Haytham ‘s Lemmas Foe Solving Al Hazen’s Problem, Archive for History of exact Sciences*” merupakan formula identitas yang ditemukan oleh Ibn Haytham seorang Matematikawan Muslim dari Basrah, Irak (379 $H -$ 453 H atau 965 M−1039 M) , sedangkan matematikawan barat mengenalnya dengan nama Alhazen. Secara terperinci keempat formula Deret Hingga Bilangan Asli penemuan Ibn Haytham disajikan dalam Lemma-lemma sebagai berikut :

Lemma.1 Deret Hingga Bilangan Asli (Pangkat satu)

$$1 + +2 \dots + n = \sum_{i=1}^{n} i \, , = \frac{1}{2}[n(n+1)]$$

Lemma.2 Deret Hingga Bilangan Asli pangkat dua (Kuadrat)

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \sum_{i=1}^{n} i^2 \, , = \frac{1}{6}[n(n+1)(2n+1)]$$

Lemma.3 Deret Hingga Bilangan Asli pangkat pangkat Tiga (Kubik)

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \sum_{i=1}^{n} i^3 \,, = \frac{1}{4}[n^2(n+1)^2]$$

Lemma.4 Deret Hingga Bilangan Asli pangkat pangkat empat (Quarter)

$$1^4 + 2^4 + \cdots + n^4 = \sum_{i=1}^{n} i^3 \,, = \frac{1}{30}[n(n+1)(6n^3 + 9n^2 + n - 1)]$$

Pembuktian untuk Lemma 1 sampai dengan Lemma.3 dilakukan menggunakan pendekatan Induksi matematika. Suatu metode Pembuktian yang pertama kali diperkenalkan oleh al-Karajī atau al-Karkhī (953 M di Karaj atau Karkh - 1029), seorang matematikawan muslim Persia (sekarang Iran) yang diungkapkan dalam karya utamanya *Al-Badi' fi'l-hisab* (Woepcke Franz, , 1853). Sedangkan untuk Lemma.4, selain menggunakan Induksi Matematika proses pembuktiannya dilanjutkan dengan pendekatan deduktif menggunakan metode langsung, suatu proses mengkonstruksi atau menyusun bukti kebenaran formula atau pernyataan secara konsep matematika berdasarkan Definisi, aksioma dsn teorema serta lemma sebagai pijakan untuk pembuktian teorema atau merupakan alat bantu untuk membuktikan suatu teorema. (Lestari K, Eka, 2015:130).

Proses pendekatan deduktif menggunakan metode pembuktian langsung, berdasarkan penjabaran Koefisien Binomial $(a+b)^n$ (hasil penemuan Omar Khayyam matematikawan muslim dari Nishafur Iran (1048 M – 1131 M).(Boyle, J.A 1975 : 102)

Teorema 1 Penjabaran Koefisien Binomial (Omar Khayyam, 1114 M)

$$(a+b)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^{n-j} b^j \,, n \in Bulat\ t \quad k\ Negatif, j = 1, 2, \ldots, n$$

Dalam hal ini $\binom{n}{j} = K_j^n$ merupakan Formula kombinasi yang dirumuskan oleh Matematikawan Muslim dari Maroko, Ibnu Banna Al-Marukkushi pada tahun 721 H atau 1321 M, (Ismai Mat Rofa, 2010).

Penelitian-peneltian terdahulu berkaitan dengan metode pembuktian dalam matematika telah dilakukan oleh AH Nurul Imamah (2016) dan Hernadi julan (2018), sedangkan yang berkaitan dengan Pembuktiian Formula Deret hingga Bilangan Asli pangkat r telah dilakukan oleh Laisouw Ruslan dan Hasriani Ishak (2016).

Berdasarkan uraian latar belakang pada Bab pendahuluan di atas, penulis tertarik untuk melakukan kajian melalui rumusan masalah

1. Bagimana pembuktian Deret hingga Bilangan asli pangkat r , untukr = 1, 2, 3 hasil penemuan matematikawan Muslim Ibn Haitham menggunakan meode Induksi matematika
2. Bagimana pembuktian Deret hingga Bilangan asli pangkat r = 4 hasil penemuan matematikawan Muslim Ibn Haitham menggunakan meode Induksi dan Deduksi matematika berbasis pembuktian Langsung
3. Bgaimana Kontribusi Matematikawan Muslim abad Pertengahan pada proses pembuktian Deret hingga Bilangan asli pangkat r.

KAJIAN TEORI

Deret Bilangan

Menurut Ensiklopedia Matematika (2013:88), Deret secara bahasa diartikan sebagai jumlah n pertama suku-suku Barisan Bilangan dan ditinjau dari sisi istilah diartikan sebagai rangkaian bilangan yang tersusu dan memenuhi kaidah tertentu.

Akasioma.1 Deret Hingga (Bartle, et.all, 2000 :53:)

1. Deret Hingga adalah jumlah n suku pertama Barisan Hingga yang merupakan sebuah fungsi dengan daerah asal hanya terdiri atas bilangan bulat Positif (Asli).
2. Deret Hingga dinotasikan dengan bentuk Formulasi
$$P(n) = S_n = U_1 + U_2 + \cdots + U_n$$
3. Penulisan ruas kanan pada Aksioma.1.2 di atasdinyatakan secara singkat dengan notasi sigma, $\sum$,

sehingga menjadi

$$P(n) \;=\sum_{j=1}^{n} U_j\,, i = 1,2, \dots, n\; dan\; r = 1,2, \dots, t$$

Metode Pembuktian Matematika

Di dalam kajian matematika, bukti adalah serangkaian argumen logis yang menjelaskan kebenaran suatu pernyataan. Argumen-argumen ini dapat berasal dari premis pernyataan atau aksioma itu sendiri, teorema-teorema lainnya, definisi,. yang dimaksud logis di sini, adalah semua langkah pada setiap argumen harus dijustfikasi oleh langkah sebelumnya. Jadi kebenaran semua premis pada setiap deduksi sudah dibuktikan (diberikan) sebagai asumsi.

Prinsip Pembuktian teorema dalam matematika secara khusus mata kuliah Analisa, dapat dilakukan proses bukti kebenarannya dengan mengambil kesimpulan yang didasarkan pada pernyataan-pernyataan lain yang benar, (seperti definisi, aksioma, teorema dan dari sifat atau teorema lain yang telah dibuktikan kebenarannya terlebih dahulu serta Lemma sebagai Teorema kecil.

Terdapat tiga metode membuktikan sifat atau teorema matematika yaitu Induksi matematika, Pembuktian Tidak langung dan Pembuktian Langsung. namun yang menjadi bahasan pada makalah ini hanya terkait dengan metode Pembuktian pendekatan Induksi Matematika dan Pembuktitan Tidak Langsung. Secara terperinci dijelaskasn sebagai Berikut :

1. **Metode Induksi Matematika**

   Merupakan salah satu argumentasi penalaran deduktif untuk pembuktian suatu teorema atau pernyataan matematika, yang semesta pembicaraannya himpunan bilangan bulat atau lebih khusus himpunan bilangan asli. Menurut Kamus Bahasa Indonesia metode induktif, secara bahasa berarti penalaran atas dasar dari hal-hal yang bersifat khusus, kemudian disimpulkan menjadi yang bersifat umum. Sejarawan matematika Perancis Frannz Woepcke mengungkapkan dan memuji Al-karaji atau Al karkhi (953 M di Karaja tau Karkh-1029 M) seorang ahli matematikawan terkemuka dari karaj Persia (Iran sekarang), dalam buku karyanya "***Extrait du Fakhri, traite d'Algèbre par abou Bekr Mohammed Ben Alhacan Alkarkhi***" (Paris, 1853), sebagai ahli matematika pertama di dunia yang memperkenalkan metode pembuktian induksi matematika untuk membuktikan kebenaran rumus jumlah integral kubus, yang sangat penting hasilnya dalam integral kalkulus, dimana didunia matematikawan barat dklaim sebagai penemuan Riemann sehingga pada abad ke17 disebut Jumlah dan Integral Riemann.

   Langkah-langkah pembuktian dengan metode induksi matematika sebagai berikut.

   pertama : Misalkan, $p(n)$ adalah suatu proposisi yang akan dibuktikan benar untuk setiap bilangan asli n.

   kedua : Ditunjukkan bahwa proposisi yang dikonstruksi p(n=l) benar.

   langkah ketiga: : Diasumsikan bahwa $p(n=k)$ benar untuk suatu bilangan asli k

   keempat : Ditunjukkan pembuktian bahwa $p(n=k+1)$ benar

   Bila kita sudah menunjukkan keempat langkah tersebut benar maka kita sudah membuktikan bahwa p(n) benar untuk semua bilangan bulat positif n.

2. **Metode Pendekatan Deduktif**

   Merupakan proses penarikan kesimpulan metode Deduksi dengan mengintegrasikan definisi, fakta atau aksioma dan Teorema serta lemma sebagai pijakan pada setiap tahap proses pembuktian. Oleh karena itu sebelum melakukan proses pembuktian secara khusus formula Identias Deret Hingga Bilangan Asli pangkat 4 pada lemma.4, sebagai pijakan tahapan proses pembuktiannya,Berikut ini disajikan gabungan r obyek dari n obyek tersedia, pada tahun 721 H atau 1321 M oleh Matematikawan Muslim Ibnu Banna Al-Marukkushi dar Maroko mengungkapkan sebagai rumus Kombinasi yang dikonstruksi pada Teorema.2 dan jua formula notasi faktorial dikonturksi pada Aksioma.1 sebagai dasar penjabaran koefisien Binomial (Teorema.1) pada bagian pendahuluan, i berikut ini :

   Teorema 2 Formula Kombinatsi (Ibnu Banna Al-Marukkushi , 721 H/1321 M)

$\binom{n}{j} = {}^{n}_{j}K = K_j^n = \frac{n!}{j!(b-j)!}$, dalam hai ini n! merupakan notasi n Faktorial
(Ismail Ropa M. 2010:191)
Aksioma 1 Faktorial (Ibnu Banna Al-Marukkushi , 721 H/1321 M)
Misalkan n adalah bilangan Asli. Besaran n faktorisl dengan notasi n! didefinisikan sebagai berikut n! = n.(n−1) ... 3.2.1.((Ismail Ropa M. 2010:190)

Selain itu untuk membantu kemudahan proses pembuktian Langsung dengan pendekatan Deduktif, berikut ini disajikan pula Teorema.3 dan lemma.5 berikut ini

Teorema 3 Kelinearan notasi sigma, ∑ (Parcell J.E, et. all, 2003:227)
Misalkan a_i dan b_i, I = 1, 2, …, n merupakan dua barisan bilangan dan c konstanta, maka

1. $\sum_{i=1}^{n} ca_i = c\sum_{i=1}^{n} a_i$
2. $\sum_{i=1}^{n} (a_i \pm b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \pm \sum_{i=1}^{n} b_i$

Selanjutnya berdasarkan Teorema.3 di atas di dapat collolary Identitas penjumlahan menurun sebagai berikut :
Collolary 1 Identitas Penjumlahan Menurun pangkat 5 (Purcell JE, et.all, 2013:228)
Misalkan i ∈ Bilangan Bulat Positif (Asli) suku-suku barisan bilangan, maka Identitas penjumlahan menurun berbasis koefisien Binomial didefinisikan
$5i^4 + 10i^3 + 10i^2 + 5i + 1 = (i+1)^5 - i^5$

METODE PENELITIAN

Panulisan Makalah ini merupakan penelitian hasil studi literatur atau kajian Pustaka dan studi literasi kontribusi Matematikawan pada abad Peretengahan. Bahan dan materi penelitian ini berupa buku teks, jurnal dan sumber lainnya yang dapat mendukung penelitian. Penelitian ini dilakukan dengan cara melakukan penelaahan literature yang menbahas kajian terkait Deret Hingga Bilangan Asli, Metode Pembuktian dalam matematika, pendekatan Induksi dan deduksi matematika, Koefisien Binomial, konsep Kombinasi, Identitas Penjumlahan menurun berbasis sifat-sifat kelinearan Notasi sigma

HASIL DAN PEMBAHASAN

Proses pembuktian untuk teorema lema.1 sampai dengan lemma.3 di atas terkait Deret Hingga Bilangan asli berpangkat r, yang ditemukan oleh Ibn Haitham pada sekitar abad ke-10 dan 11 Masehi, dilakukan oleh Al Karaji pada abad ke-10 Masehi menggunakan metode Induksi Matematika dan pada abad ke-19 Masehi diperbaiki oleh Dedekind R matematikawan dari kawasan Eropa dengan memberikan Interpretasi Logis.

Pertama Pembuktian Lemma.1

Misalkan 1 + 2 + 3 + … + n = $\frac{n(n+1)}{2}$. akan menunjukkan bahwa P(n) bernilai benar untuk semua bilangan bulat positif n.

Langkah.1 Mislakan Pada ruas kiri lemma.1 $P(n) = 1 + +2 \ldots + n$ dan ruas kanannya $P(n) = \frac{\boldsymbol{n(n+1)}}{\boldsymbol{2}}$

-Langkah 2. Untuk n=1, pada ruas kiri P(1) = 1 dan pada ruas kanan Misalkan P(n) = $\frac{n(n+1)}{2}$, maka untuk n=1, dari formula ruas kanan tersebut diperoleh P(1) = $\frac{1(1+1)}{2} = \frac{2}{2} = 1$

Jadi untuk n=1, berlaku pada ruas kiri dan ruas kanan menghasilkan bilangan yang sama, yaitu 1.Maka pernyataan atau formulas pada teorema.1 ini dengan jelas bernilai Benar.

-Langkah 3. asumsikan bahwa P(n=k) bernilai Benar. Sehingga hipotesis induksi kita berbentuk

$1 + 2 + 3 + \ldots + k = \frac{k(k+1)}{2}$

-Langkanh 4. Kita akan menggunakan hipotesis di atas untuk menunjukkan apakah P(k + 1) benar,

Untuk n =k+1, diperoleh ruas kiri persamaan

$$1 + 2 + 3 + \ldots + k + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1)$$
$$= \frac{k(k+1)}{2} + \frac{2(k+1)}{2}$$
$$= \frac{(k+1)}{2}(k+2)$$
$$= \frac{1}{2}\{(k+1)[(k+1)+1]\}$$

Maka untup $P(k+1) = \frac{1}{2}\{(k+1)[(k+1)+1]\}$

Pada ruas kanan diperoeleh

$$P(k+1) = \frac{1}{2}\{(k+1)[(k+1)+1]\}$$

Sehingga kebenaran P(k + 1) mengikuti kebenaran P(k), dan kita telah melakukan langkah induksi. Setelah membuktikan kebenaran dari keempat langkah tersebut, kita dapat menyimpulkan dengan induksi Matematika bahwa P(n) untuk formula Deret Hingga Bilangan asli benar untuk semua bilangan bulat positif (Asli) n.

Kedua Pembuktian Lemma.2

Deret Hingga Bilangan Asli pangkat dua (Kuadrat)

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2, = \frac{1}{6}[n(n+1)(2n+1)]$$

akan ditunjukkan bahwa dengan memisalkan kedua ruan sama dengan P(n) bernilai benar untuk semua bilangan bulat positif n.

Langkah.1 Mislakan Pada sebelah ruas kiri lemma.1 $P(n) = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$ dan padaruas kanannya $P(n) = \frac{1}{6}[n(n+1)(2\quad +1)]$

-Langkah 2. Untuk n=1, pada sebelah ruas kiri $P(1) = 1^2 = 1$ dan pada sebalah ruas kanannya Misalkan $P(n) = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$, maka untuk n = 1, dari formula pada ruas sebelah kanan tersebut diperoleh

$P(1) = \frac{1}{6}[1.(1+1)(2.1+1)] = \frac{1}{6}[1.(2)(3)] = \frac{6}{6} = 1$

Jadi untuk n=1, berlaku pada ruas kiri dan ruas kanan menghasilkan bilangan yang sama, yaitu 1.Maka pernyataan aytau formulas pada teorema.1 ini dengan jelas bernilai Benar.

-Langkah 3. asumsikan bahwa P(n=k) bernilai Benar. Sehingga hipotesis induksi kita berbentuk $1^2 + 2^2 + \cdots + k^2, = \frac{1}{6}[k(k+1)(2k+1)]$

-Langkanh 4. Kita akan menggunakan hipotesis di atas untuk menunjukkan apakah P(k + 1) benar,

Untuk n =k+1, diperoleh ruas kiri persamaan

$$1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{1}{6}[k(k+1)(2k+1)]$$
$$= \frac{1}{6}[k(k+1)(2k+1)] + \frac{6.(k+1)^2}{6}$$
$$= \frac{1}{6}\{(k+1)[k(2k+1) + 6.(k+1)]\}$$
$$= \frac{1}{6}[(k+1)(2k^2 + k + 6k + 6)]$$
$$= \frac{1}{6}[(k+1)(2k^2 + 7k + 6)]$$

$$= \frac{1}{6}[(k+1)(k+2)(2k+3)]$$
$$= \frac{1}{6}\{(k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1]\}$$

Maka untuk.didapat$P(k+1) = \frac{1}{6}\{(k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1]\}$
Sedangkan pada ruassebelah kanan diperoleh

$$P(k+1) = \frac{1}{6}\{(k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1]\}$$

Sehingga kebenaran P(k + 1) mengikuti kebenaran P(k), dan kita telah melakukan langkah induksi. Setelah membuktikan kebenaran dari keempat langkah tersebut, kita dapat menyimpulkan dengan induksi Matematika bahwa P(n) untuk formula Deret Hingga Bilangan asli Pangkat dua atau kuadrat bernilai benar untuk semua bilangan bulat positif n.

Ketiga Pembuktian Lemma.3
Deret Hingga Bilangan Asli pangkat dua (Kuadrat)

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3, = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

akan ditunjukkan bahwa dengan memisalkan kedua ruan sama dengan P(n) bernilai benar untuk semua bilangan bulat positif n.
Langkah.1 Mislakan Pada sebelah ruas kiri lemma.1 $P(n) = 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3$ dan pada ruas kanannya $P(n) = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$
-Langkah 2. Untuk n=1, pada sebelah ruas kiri P(1) = $1^3 = 1$ dan pada sebalah ruas kanannya Misalkan P(n) = $\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$, maka untuk n = 1, dari formula pada sebelah ruas sebelah kanan tersebut diperoleh P(1) = $\frac{1}{4}1^2(1+1)^2 = \frac{1}{4}1.(2^2) = \frac{4}{4} = 1$
Jadi untuk n=1, berlaku pada ruas kiri dan ruas kanan menghasilkan bilangan yang sama, yaitu 1.Maka pernyataan atau formula pada teorema.1 ini dengan jelas bernilai Benar.
-Langkah 3. asumsikan bahwa P(n=k) bernilai Benar. Sehingga hipotesis induksi kita berbentuk $1^3 + 2^3 + \cdots + k^3, = \frac{1}{4}k^2(k+1)^2$
-Langkanh 4. Kita akan menggunakan hipotesis di atas untuk menunjukkan apakah P(k + 1) benar,
Untuk n =k+1, diperoleh ruas kiri persamaan

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 + (k+1)^3 = \frac{1}{4}k^2(k+1)^2 + (k+1)^3$$
$$= \frac{1}{4}k^2(k+1)^2 + \frac{4.(k+1)^3}{4}$$
$$= \frac{1}{4}(k+1)^2(k^2 + 4\mathrm{k} + 4)$$
$$= \frac{1}{4}(k+1)^2(k+2)^2$$
$$= \frac{1}{4}(k+1)^2[k+1)+1]^2$$

Maka untuk.didapat $P(k+1) = \frac{1}{4}(k+1)^2[k+1)+1]^2$
Sedangkan pada ruas sebelah kanan diperoleh

$$P(k+1) = \frac{1}{4}(k+1)^2[k+1)+1]^2$$

Sehingga kebenaran P(k + 1) mengikuti kebenaran P(k), dan kita telah melakukan langkah induksi. Setelah membuktikan kebenaran dari keempat langkah tersebut, kita dapat menyimpulkan dengan induksi Matematika bahwa P(n) untuk formula Deret Hingga Bilangan asli Pangkat tiga atau kubik bernilai benar untuk semua bilangan bulat positif n.

Keempat Pembuktian Lemma.4

Deret Hingga Bilangan Asli pangkat dua (Kuadrat)

$$1^4 + 2^4 + \cdots + n^4 = \frac{1}{30}[n(n+1)(6n^3 + 9n^2 + n - 1)]$$

akan ditunjukkan bahwa dengan memisalkan kedua ruan sama dengan P(n) bernilai benar untuk semua bilangan bulat positif n.

Langkah.1 Mislakan Pada sebelah ruas kiri lemma.1 $P(n) = 1^4 + +2^4 + \cdots + n^4$ dan pada ruas kanannya $P(n) = \frac{1}{30}[n(n+1)(6n^3 + 9n^2 + n - 1)]$

-Langkah 2. Untuk n=1, pada sebelah ruas kiri P(1) = $1^4 = 1$ dan pada sebalah ruas kanannya Misalkan P(n) = $\frac{1}{30}[n(n+1)(6n^3 + 9n^2 + n - 1)]$,

maka untuk n = 1, dari formula pada sebelah ruas sebelah kanan tersebut diperoleh

$$P(1) = \frac{1}{30}[1(1+1)(61^3 + 91^2 + 1 - 1)] = \frac{1}{30}[1(2)(15)] = \frac{1}{30}30 = 1$$

Jadi untuk n=1, berlaku pada ruas kiri dan ruas kanan menghasilkan bilangan yang sama, yaitu 1.Maka pernyataan atau formula pada teorema.1 ini dengan jelas bernilai Benar.

-Langkah 3. asumsikan bahwa P(n=k) bernilai Benar. Sehingga hipotesis induksi kita berbentuk $1^4 + 2^4 + \cdots + k^4, = \frac{1}{30}[k(k+1)(6k^3 + 9k^2 + k - 1)]$

-Langkanh 4. Kita akan menggunakan hipotesis di atas untuk menunjukkan apakah P(k + 1) benar,

Untuk n =k+1, diperoleh ruas kiri persamaan

$$\begin{aligned}
1^4 + 2^4 + \cdots + k^4 + (k+1)^{\,4} &= \tfrac{1}{30}[k(k+1)(6k^3 + 9k^2 + k - 1)] + (k+1)^{\,4} \\
&= \tfrac{1}{30}[(k^2 + k)(6k^3 + 9k^2 + k - 1)] + \tfrac{30(k+1)^{\,4}}{30} \\
&= \frac{1}{30}\{[(k^2 + k)(6k^3 + 9k^2 + k - 1)] + 30(k+1)^{\,4}\} \\
&= \frac{1}{30}\{[(k^2 + k)(6k^3 + 9k^2 + k - 1)] + 30(k^4 + 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1)\} \\
&= \frac{1}{30}\{(k^2 + k)(6k^3 + 9k^2 + k - 1) + 30(k^4 + 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1)\} \\
&= \frac{1}{30}\{(k+1)(k+2)(6(k+1)^3 + 9(k+1)^2 + (k+1) - 1)\} \\
&= \frac{1}{30}\{(k+1)[(k+1)+1](6(k+1)^3 + 9(k+1)^2 + (k+1) - 1)\}
\end{aligned}$$

Maka untuk.didapat $P(k + 1 = \frac{1}{30}\{(k+1)[(k+1)+1](6(k+1)^3 + 9(k+1)^2 + (k+1) - 1)\}$

Sedangkan pada ruas sebelah kanan diperoleh

$$P(k+1) = \frac{1}{30}\{(k+1)[(k+1)+1](6(k+1)^3 + 9(k+1)^2 + (k+1) - 1)\}$$

Sehingga kebenaran P(k + 1) mengikuti kebenaran P(k) dan kita telah melakukan langkah induksi. Setelah membuktikan kebenaran dari keempat langkah tersebut, kita dapat menyimpulkan dengan induksi Matematika bahwa P(n) untuk formula Deret Hingga Bilangan asli Pangkat empat bernilai benar untuk semua bilangan bulat positif n.

Secara khusus untuk pembuktian pada lemma.4 ini, selain dengan induksi matematika dilakukan pula dengan menggunakan pendekatan deduksi melalui pembuktian langsung disertai dengan ketentuan bahwa lemma.1 sampai lemma.3 berkaitan dengan formula Deret Hingga Bilangan asli sampai Pangkat tiga diasumsikan benar.

Berikut ini tahapan untuk melihat kebenaran lemma.4 terkait dengan formula Deret Hingga Bilangan asli Pangkat empat. Adapun poses pembuktiannya dapat diuraikan sebagai berikut yaitu dengan menggunakan acuan pijakan collolary 1 terkait dentitas penjumlahan menurun berbasis koefisien Binomial didefinisikan $5i^4 + 10i^3 + 10i^2 + 5i + 1 = (i+1)^5 - i^5$ dan i ∈ Bilangan Asli atau Bulat Positif, Selanjutnya kedua ruas kiri dan kanan diberi notasi sigma, diperoleh bentuk

$$\sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{n}}[5i^4 + 10i^3 + 10i^2 + 5i + 1] = \sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{n}}[(i+1)^5 - i^5]$$

$$\sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{n}}[5i^4 + 10i^3 + 10i^2 + 5i + 1] = (n+1)^5 - 1^5 \qquad (collolary.1)$$

$$\mathbf{5}\sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{n}} i^4 + 10\sum_{i=1}^{n} i^3 + 10\sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{n}} i^2 + \mathbf{5}\sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{i} + \sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{n}} \mathbf{1} = (n+1)^5 - 1 \quad (Teorema.3.1\ dan\ Teorema.3.2)$$

$$\mathbf{5}\sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{i^4} + \mathbf{10}\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}\boldsymbol{n^2}(\boldsymbol{n}+\mathbf{1})^{\mathbf{2}}\right) + 10\left(\frac{1}{6}[n(n+1)(2n+1)]\right) + \mathbf{5}\left(\frac{\mathrm{n(n+1)}}{2}\right) + \boldsymbol{n} = (n+1)^5 - 1$$

(Lemma.1,Lemma.2, Lemma.3)

$$\sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{n}} i^4 = \frac{[(n+1)^5 - 1] - \frac{5}{2}(n^4 + 2n^3 + n^2) - \frac{5}{3}(2n^3 + 3n^2 + n) - \frac{5}{2}(n^2 + n) - n}{5}$$

(kalikan penyebut dan pembilang dengan 6)

$$\sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{n}} i^4 = \frac{(6n^5 + 30n^4 + 60n^3 + 60n^2 + 30n) - (15n^4 + 30n^3 + 15n^2) - (20n^3 + 30n^2 + 10n) - (15n^2 + 1}{30}$$

(sifat Substitusi)

$$\sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{n}} i^4 = \frac{6n^5 + 30n^4 + 60n^3 + 60n^2 + 30n - 15n^4 - 30n^3 - 15n^2 - 20n^3 - 30n^2 - 10n - 15n^2 - 15n - n}{30}$$

$(SifatSubstitusi\ )$

$$\sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{n}} i^4 = \frac{6n^5 + 15n^4 + 10n^3 - n}{30} \qquad (operasi\ dasar\ pengurangan)$$

$$\sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{n}} i^4 = \frac{n(6n^4 + 15n^3 + 10n^2 - 1)}{30} \qquad (Sifat\ Distributif)$$

$$\sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{n}} i^4 = \frac{n(n+1)(6n^3 + 9n^2 + n - 1)}{30} \qquad (operasi\ pemfaktoran)$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^4 = \frac{1}{30}[n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)] \qquad (Terbukti\ Benar)$$

Hasil dalam penulisan makalah ini memberikan uraian yang jelas mengenai prosedur pembuktian dengan pendekatan metode Induksi untuk lemma Deret Hingga Bilangan asli pangkat sampai dengan tiga dan Induksi- Deduksi Matematika dengan baik terbukti dengan benar.

KESIMPULAN

Berdasarkan hasil analisis dan Pembahasan dapat diperoleh penarikan kesimpulan sebagai berikut :

1. pembuktian Deret hingga Bilangan asli pangkat r , sampai dengan tingkat tiga hasil penemuan matematikawan Muslim Ibn Haitham menggunakan metode Induksi matematika dapat terbukti dengan baik berbasis Pendekatan Konsep Binomial.
2. pembuktian Deret hingga Bilangan asli pangkat empat hasil penemuan matematikawan Muslim Ibn Haitham menggunakan metode Induksi - Deduksi matematika berbasis pembuktian langsung terbukti baik namun lebih efektif dengan pendekatan Induktif dibandingkan dengan Deduktif.
3. Kontribusi Matematikawan Muslim abad Pertengahan pada proses pembuktian Deret hingga Bilangan asli pangkat r berpengaruh dan memegang peran penting dalam sejarah perkebnagan Matematika modern saat ini serta diakui oleh kalangan matematikawan di kawasan Eropa (Barat).

DAFTAR PUSTAKA

AH Nurul I, 2016, Pengembangan Bahan Ajar Mata Kuliah Analisis Real Berbasis Pembuktian Pada Semester V UMMUH Jember, E-Jurnal Gammath, Vol.1 No.2. Diakses 1 Desember 2022

Bartle, Robert G and D.R Sherbet, 2000, Inrroduction To real analysis, third Edition, John wiley & Sons, Neew York

Boyle, J.A 1975, Omar Khayyam Astronomer, Mathematician, and Poet, The Cambridge Histoey of Iran, vol.4 Ed. R. H, Frye, Cambridge Univ. Press. E-journal diakses 20 Desember 2022

Hernadi Julan, 2008, Metode Pembuktian Dalam Matematika, Jurnal Pendidikan Matematika, Vol.2 No.1, Diakses 11 Desember 2022

Laisouw Ruslan & Hasriani Ishak, 2016, Menentukan Rumus Deret Hingga Bilangan Asli Pangkat r Menggunakan Pendekatan Binomial dengan Uji Induksi Matematika, e - Jurnsl Sains - vol.VII No.3, desember, diakses 2 Januari 2023. Diakses 11 Desember 2022h

Lestari Eka, Karunia, 2015, Analisis Kemampuan Pembukian Matematika Mahasiswa menggunakan pendekatan Induktif - Deduktif Pada Mata Kuliah Analisis Real, Mendididk, e-Jurnal Kajian Pendidikan dan Pengajaran, Volume.1,. E jurnal diakses 11 desember 2022

Mat Rofa Ismail, 2010, Menerokal Etnomatematika Melayu Islam:Teori Kombinatorik Al-Khatib dalam Alam Al Hussab, Proceeding of international Seminar Mathematics and Its usage in Other Areas, University Putra Malaysia. E-jurnal diakses 4 Agustus 2022

Nahrowi, Adjie. 2006. Pemecahan Masalah Matematika. Bandung : UPI PRESS. E - jurnal. Diakses 1 Desember 2022

Purcell J Edwin, Dale Verberg & Steven Rigdon, 2013, Calculus 9th Edition, Prentice HallInc, Publishing as Addison Wesley

Rozhankaya, Miriam & Boris A Rosenfeld,, 1982, Ibn Al-Haytham's Lemmas for Solving Al-Hazen's Problem , Archive for History of exact Sciences, New Jersey, Humanties Press. E – journal di Akses 11 Desember 2022

ST. Negoro dan B, Harahap, 2003, Ensiklopedia Matematika, GHalia Indonesia, Jakarta. Diakses pada 2 Januari 20232023

Woepcke Franz, 1 853, Extrait du Fakhri, traite d' Algèbre par abou Bekr Mohammed Ben Alhacan Alkarkhi, Paris. E-journal diakses 5 Januari 2023.