Matematika Sains Volume 2 Nomor 1 Tahun 2024

HIDDEN MARKOV MODEL DAN APLIKASINYA

Mirtawati dan Ali Ilham Sofiyat

Program Studi Matematika Fakultas Sains & Teknologi Universitas Islam As-Syafi'iyah
mirta.mulyami@gmail.com, alisofiyat@gmail.com

DOI: https://doi.org/10.34005/ms.v2i1.3803

ABSTRAK

Tulisan ini memaparkan hasil penelitian literature penulis mengenai *Hidden Markov Model* (HMM). Teori mengenai HMM dikembangkan untuk *state* (keadaan) yang tidak dapat diamati secara langsung, modelnya juga tetap *hidden* (tersembunyi), namun parameter model diketahui dan output tetap dapat diperoleh. Aplikasi HMM pada *observation state* cuaca dalam waktu 7 hari dan *hidden state* membawa dan tidak mebawa jas hujan, menggunakan ke-lima parameter yaitu Matriks transisi (A), Matriks emisi (B), jumlah elemen *hidden state* (N), jumlah *state* terobservasi (M) dan distribusi peluang awal (π). Output yang diperoleh setelah melalui tahap evaluasi dan decoding adalah peluang *state* hujan sama dengan 0,13, atau $\delta_2(h) = \mathbf{0,13}$ **dan** barisan *state* yang optimal adalah $Q = \{q_1^*, q_2^*\} = \{\text{hujan. hujan}\}$

Key Words : *Hidden Markov Model*, Matriks Transisi, Matriks Emisi dan Distribusi Stasioner

ABSTRACT

This paper presents the results of research literature about the author of Hidden Markov Model (HMM). Theories about HMM developed for state that can not be observed directly, the model also remain hidden, but the model parameters are known and fixed output can be obtained. Application state HMM on weather observation within 7 days and hidden and not brought the state to bring a raincoat, using all five parameters: The transition matrix (A), the emission matrix (B), the number of hidden elements of state (N), the number of state observed (M) and the initial probability distribution ($\boldsymbol{\pi}$). The output obtained after the evaluation phase and decoding is the same as the chance of rain state 0.13 or $\boldsymbol{\delta_2(h)} = 0.13$ and optimal sequence state is $\boldsymbol{Q} = \{\boldsymbol{q_1^*}, \boldsymbol{q_2^*}\}$ = {rain. rain}

Keywords : *Hidden Markov Model*, Transition Matrix, Emission Matrix and Stasioner Distribution

1. Pendahuluan

Hidden Markov Model (HMM) merupakan pengembangan dari model markov. Model Markov dikembangkan pertama kali oleh Andreyevich Markov (1856 – 1922), seorang ilmuan berkebangsaan Rusia. Markov meneliti prilaku proses stokastik dalam selang waktu yang panjang. Model markov memiliki sifat *memory less* yaitu *state* (keadaan/perilaku) akan datang tergantung pada *state* sekarang. Histori *state* secara keseluruhan saling bebas (independen) pada waktu $t = 1, 2 \ldots n - 1$. Dengan model markov *state* akan datang dapat diprediksi dengan probabiitas.

HMM dikembangkan untuk *state* objek penelitian yang tidak dapat diamati secara langsung, oleh karenanya informasi didapatkan dari kemungkinan transisi antar *state*. Sifat *hidden* merupakan langkah suatu *state* yang dilewati model, bukan parameter dari model. Sehingga model tetap *hidden* meskipun parameter model diketahui.

Tujuan dari penelitian ini adalah untuk mengetahui teori dasar HMM. Untuk lebih memahami teori HMM maka diperlukan aplikasi beserta penyelesaian masalah dari aplikasinya. Aplikasi dari penelitian ini adalah pengamatan pada cuaca dengan *observation state* adalah cuaca dalam seminggu (panas dan hujan) serta *hidden state* nya adalah membawa jas hujan dan tidak membawa jas hujan. Tahapan penyelesaian masalah HMM nya adalah evaluasi yaitu menghitung peluang urutan nilai observasi dengan *Forward Algoritm* dan decoding yaitu menentukan barisan *hidden state* yang optimal dengan *Viterbi Algoritm*.

2. Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi literature tentang Model Markov dan *Hidden Markov Model*. Dari studi literature diperoleh hal berikut :

2.1 Definisi, Parameter, Asumsi dan Masalah HMM

Hidden Markov Model

Hidden Markov Model (HMM) adalah perluasan dari rantai markov. Berbeda dengan Model Markov, HMM dikembangkan untuk keadaan yang tidak dapat dilihat secara langsung, meskipun parameter diketahui, model tetap *hidden* tetapi hasil out put yang bergantung pada *state* tersebut dapat terlihat.

Definisi :

Jika $X = (X_1, X_2, .. X_t..)$ adalah Proses Markov dan $O = (O_1, O_2, .. O_t..)$ adalah sebuah fungsi dari X, maka X adalah sebuah HMM yang dapat diobservasi dari O, atau dapat ditulis sebagai :

$$O = f(X)$$

untuk suatu fungsi f. Parameter X menyatakan *state process* yang tersembunyi, parameter O menyatakan *observation process* yang dapat diobservasi.

Parameter HMM

HMM dapat dinyatakan sebagai $\lambda = (A, B, \pi)$.

A, B, π merupakan parameter HMM bersama N dan M.

Untuk lebih lengkapnya parameter HMM dijelaskan sebagai berikut :

a. N, yaitu Jumlah elemen *hidden state* dalam HMM, notasi $n = 1, 2 \dots$
b. M yaitu elemen *state* yang terobservasi, notasi $k = 1,2,3$ ...
c. A adalah matriks peluang transisi dengan a_{ij} adalah elemen dari A yang merupakan distribusi kemungkinan perpindahan *state* (*transition probability*) pada saat $i + 1$, jika diketahui *state* X pada saat t atau $a_{ij} = P\{x_{t+1} = J | X_t = i\}$ dimana $1 \le i,\ j \le N$.
d. $B = (b_i(k))$, disebut matriks emisi yaitu distribusi peluang observasi pada saat t dan pada *state* i.
   Dengan : $b_i^k = b_i(k) = P(O_t = k | X_t = i), 1 \le t \le \mathrm{N}, 1 \le \mathrm{k} \le \mathrm{N}$
   k adalah observasi pada waktu t
e. $\pi = \{\pi_i\}$, dimana $\pi_i = P(q_i = S_i)$, merupakan himpunan distribusi peluang awal,
   dengan : $\pi_i = P(X_1 = i), \quad 1 \le i \le n$

Asumsi HMM

a. Asumsi Markov
   Keadaan yang akan datang hanya dipengaruhi oleh keadaan sekarang. Model yang dihasilkan adalah HMM model I
b. Asumsi Stasioner
   Peluang transisi dari suatu keadaan ke keadaan lainnya independen dengan waktu saat transisi itu terjadi, maka untuk sembarang t_1, t_2 berlaku :
   $$P\{X_{t_1+1} = j | X_{t_2+1} = i\} = P\{X_{t_1+1} = j | X_{t_2+1} = i\} = P_{ij}$$
c. Asumsi kebebasan
   Jika diketahui barisan observasi $O_1, O_2, .. O_t$ dan barisan keadaan $X_1, X_2, .. X_t$.. maka *state* saat ini bersifat independen dengan pengamatan sebelumnya. Dinyatakan sebagai :
   $$P(O | X, \lambda) = \prod_{i=1}^{T} P(O_t [X_t . \lambda)$$

Masalah Dalam HMM :

a. Evaluasi yaitu menghitung peluang urutan nilai observasi. Untuk menyelesaikan masalah evaluasi dapat digunakan *Forward Algoritm*.

b. Decoding yaitu menentukan barisan *hidden state* yang optimal, yang dimaksud dengan *hidden state* yang optimal adalah barisan *hidden state* yang memiliki peluang tertinggi dalam menghasilkan barisan observasi yang telah diketahui sebelumnya dengan mempertimbangkan peluang *state* transisi. Untuk menyelesaikan masalah decoding maka dapat digunakan *Viterbi Algoritm.*

c. Learning yaitu menentukan parameter HMM. Learning ditentukan dengan algoritma Baun - Welch

2.2 Metode Penyelesaian Masalah HMM

Forward Algoritm (metoda penyelesaian untuk masalah evaluasi)

Ada tiga Tahap untuk menyelesaikan masalah evaluasi dengan menggunakan *Forward algoritm (menuurut 3 dan 4)*, yaitu :

a. Inisiasi

$$\alpha_1(i) = \pi(i)b_i \quad \text{dengan} \quad 1 \leq i \leq N$$

Persamaan diatas diperoleh dari substitusi dua parameter HMM : $\pi(i) = P(X_t = i)$ dan $b_i(k) = P(O_t = k|X_t = i)$ yaitu :

$$\begin{aligned}\alpha_1(i) &= P(O_1, X_1 = i|\lambda)\\ &= P(X_1 = i, \lambda)P(O_1|X_1 = i|\lambda)\\ &= \pi(i)\, P(O_1|X_1 = i|\lambda)\\ &= \pi(i)b_i(O_1)\end{aligned}$$

b. Induksi

$$\alpha_{t+1}(j) = \left[\sum_{i=1}^{N} \alpha_t(i)a_{ij}\right] b_j(O_{t+1})$$

Persamaan diatas diperoleh dari substitusi dua parameter HMM :
$b_i(k) = P(O_t = k|X_t = i)$ dan a_{ij} yaitu :

$$\begin{aligned}\alpha_{t+1}(j) &= P(O_1, O_2, \dots, O_t, O_{t+1}, X_{t+1} = j|\lambda)\\ &= P(O_1, O_2, \dots, O_t, O_{t+1}|X_{t+1} = j, \lambda)P(X_{t+1} = J|\lambda)\\ &= P(O_1, O_2, \dots, O_t, |X_{t+1} = j|\lambda)P(X_{t+1} = J, \lambda)P(X_{t+1} = j|\lambda)\\ &= P(O_1, O_2, \dots, O_t, X_{t+1} = j|\lambda)\; P(O_{t+1}|X_{t+1} = J, \lambda)\\ &= P(O_1, O_2, \dots, O_t, X_{t+1} = j|\lambda)\; b_j(O_{t+1})\\ &= \left[\sum_{i=1}^{n} P(O_1, O_2, \dots, O_t x_t = i, X_{t+1} = j|\lambda)\right] b_j(O_{t+1})\\ &= \left[\sum_{i=1}^{n} P(O_1, O_2, \dots, O_t x_t = i|\lambda)P(X_{t+1} = j|O_1, O_2, \dots, O_t x_t = i, \lambda)\right] b_j(O_{t+1}\\ &= \left[\sum_{i=1}^{n} P(O_1, O_2, \dots, O_t x_t = i|\lambda)P(X_{t+1} = j|x_t = i, \lambda)\right] b_j(O_{t+1})\\ &= \left[\sum_{i=1}^{N} \alpha_t(i)a_{ij}\right] b_j(O_{t+1})\end{aligned}$$

c. Terminasi

Pada tahap terminasi, semua peluang gabungan dari observasi dan *hidden state* dijumlahkan. Peluang marjinal dari observasi tersebut adalah :

$$P(O|\lambda) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_r(i)$$

Viterbi Algortm (metoda penyelesaian untuk masalah *Decoding*)

Ada empat tahap untuk menyelesaikan masalah *Decoding* dengan menggunakan *Viterbi Algoritm (menurut 1,3 dan 4)*, yaitu :

a. Instalasi :

$$\delta_1(i) = \pi_1 b_1(\sigma_1), \qquad 1 \le i \le N, \psi_1(i) = 0$$

b. Rekursi:

$$\delta_t(j) = \max_{1\le i\le N}\left[\delta_{t-1}(i)a_{ij}\right] b_j(O_t), \qquad 2 \le t \le T, 1 \le j \le N$$

$$\psi_1(j) = arg \max_{1\le i\le N}\left[\delta_{t-1}(i)a_{ij}\right], \qquad 2 \le t \le T, 1 \le j \le N$$

c. Terminasi

$$P^* = \max_{1\le i\le N}[\delta_r(i)]$$

$$q_r^* = arg \max_{1\le i\le N}[\delta_r(i)]$$

d. Backtracing (Barisan *State* Optimal)

$$q_t^* = \psi_{t+1}(q_t^*). t = T-1, T-2, \dots, 1$$

3.Hasil dan Pembahasan

3.1 Ilustrasi Markov Model

Misal diberikan barisan *state* “cuaca” dalam 7 hari adalah sebagai berikut :

$X(n)$ ={panas, panas, hujan, hujan, panas, hujan, panas}

maka peluang besok akan hujan atau ditulis :

$$P(X_8 = \text{hujan}|X_1 = panas, X_2 = panas. X_3 = hujan. X_4 = hujan, X_5 = panas, X_6 = hujan, X_7 = panas\}$$
$$= P(X_8 = \text{hujan}|\ X_7 = \text{panas}\},$$

atau dinyatakan dengan matriks peluang transisi adalah sebagai berikut

Tabel.1. Matriks Peluang Transisi

Cuaca Hari ini	Cuaca besok Hari	
	Panas	Hujan
Panas	0,33	0,67
Hujan	0.67	0,33

Dan diagram matriks transisinya adalah

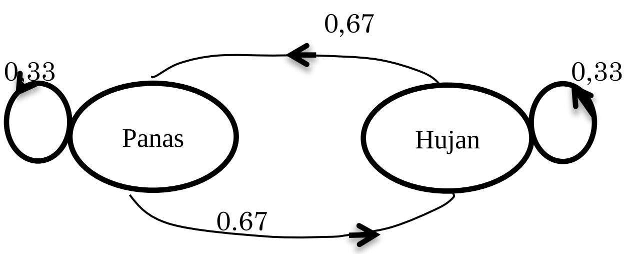

Diagram 1. Peluang Matriks Transisi

3.2 Ilustrasi Hidden Markov Model

Seperti ilustrasi pada model markov diatas, barisan *state* “cuaca” selama 7 hari adalah : $X(n)$ ={panas, panas, hujan, hujan, panas, hujan, panas}. Cuaca tersebut mempengaruhi seseorang untuk membawa jas hujan atau tidak membawa jas hujan (*hidden state*)
Ilustrasi dapat digambarkan sebagai berikut :

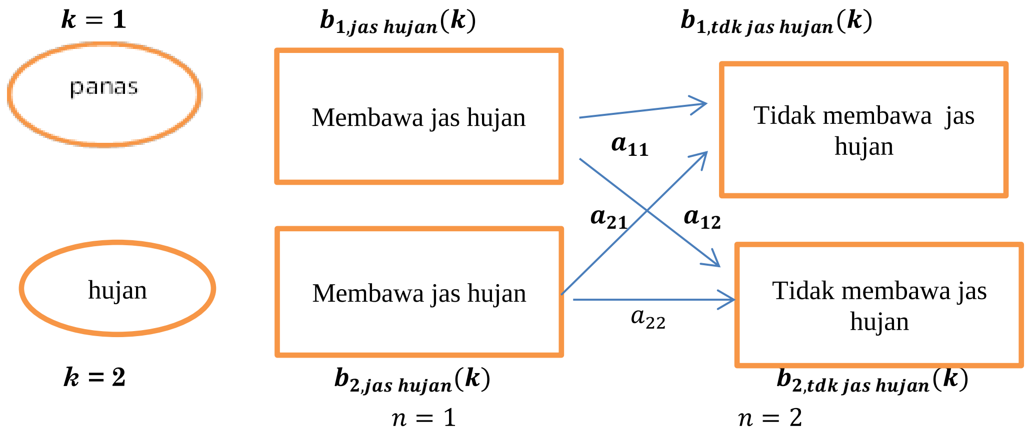

Diagram 2. Hidden Markov, dengan N = 2

Maka parameter HMM dapat ditentukan sebagai berikut :
$N = 2$ (Jumlah elemen *hidden state*), dapat ditulis $X_t = n$, dengan $n = 1$ (membawa jas hujan), $n = 2$ (tidak membawa jas hujan)
$M = 2$ (Jumlah elemen *observation state*), yaitu panas dan hujan, sehingga $k = 1$ dan 2

$$A = a_{ij} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.33 & 0.67 \\ 0,67 & 0,33 \end{bmatrix}$$

$B = b_i(k)$, diperoleh :

Tabel 2. Matriks Emisi

	Probabiitas dengan jas hujan
Panas	0.1
Hujan	0.9

$\pi = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$ karena M memiliki 2 buah elemen, diperoleh dari : $\pi_i = \frac{1}{2}, \quad i = 1,2$

Evaluasi (menentukan Peluang urutan nilai Observasi)
Menentukan peluang urutan nilai observasi dengan *Forward Algoritm* , tahapannya adalah :

a. Inisiasi :

$$\alpha_1(i) = \pi(i) b_i(O_1)$$
$$\alpha_1(1) = \pi(1) b_1(\text{panas}) = 0,5 * 0.1 = 0.05$$
$$\alpha_1(2) = \pi(2) b_2(\text{panas}) = 0.5 * 0.9 = 0.45$$

b. Induksi

Pada tahap ini akan dihitung :

$$\alpha_2(j) = \left[\sum_{i=1}^{N} \alpha_t(i) a_{ij} \right] b_j(O_2)$$
$$\alpha_2(1) = [\alpha_1(1)a_{11} + \alpha_1(2)a_{21}] b_1(O_2) = [0,05 * 0.33 + 0.45 * 0.67](0.9) = 0.29$$
$$\alpha_2(2) = [\alpha_1(1)a_{12} + \alpha_1(2)a_{22}] b_2(O_2) = [0.05 * 0.67 + 0.45 * 0.33](0,1) = 0,02$$

c. Terminasi

Peluang marjinal dari observasi tersebut adalah :

$$P(O|\lambda) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_r(i)$$

$$P(O = Panas, hujan|\lambda) = \alpha_1(1) + \alpha_1(2)$$

$$= 0.05 + 0.45 = 0.95$$

Decoding (menentukan barisan *hidden state* yang optimal)

Untuk menentukan barisan *hidden state* yang optimal digunakan *Viterbi Algoritm*, yaitu

a. Inisialisasi :

$$\delta_1(i) = \pi_1 b_1(O_1), \qquad 1 \leq i \leq N, \psi_1(i) = 0$$

$$\delta_1(\text{panas}) = \pi_{panas} b_{\text{jas hujan}}(O = \text{panas}) = 0.5 * 0.1 = 0.05$$

$$\psi_1(\text{panas}) = 0$$

$$\delta_1(\text{hujan}) = \pi_{hujan} b_{\text{jas hujan}}(O = \text{hujan}) = 0.5 * 0.9 = 0.45$$

$$\psi_1(\text{hujan}) = 0$$

b. Rekursi:

$$\delta_t(j) = \max_{1 \leq i \leq N} \left[\delta_{t-1}(i) a_{ij}\right] b_j(O_t), \qquad 2 \leq t \leq T, 1 \leq j \leq N$$

$$\psi_t(j) = arg \max_{1 \leq i \leq N} \left[\delta_{t-1}(i) a_{ij}\right], \qquad 2 \leq t \leq T, 1 \leq j \leq N$$

Sehingga :

$$\delta_2(\text{panas}) = max\left[\delta_1(\text{panas}).\, a_{\text{panas,panas}}, \delta_1(\text{hujan}).\, a_{\text{panas,hujan}}\right] b_{panas}(\text{jas hujan})$$

$$= \max\{0.05 * 0.33; 0.45 * 0.67]\,(0.1) = 0.03$$

$$\psi_2(panas) = \text{hujan}$$

$$\delta_2(\text{hujan}) = max\left[\delta_1(\text{panas}).\, a_{\text{panas,hujan}}, \delta_1(\text{hujan}).\, a_{\text{hujan,hujan}}\right] b_{hujan}(jas\ hujan)$$

$$= \max\{0.05 * 0.67; 0.45 * 0.33]\,(0.9) = 0.13$$

$$\psi_2(\text{hujan}) = \text{hujan}$$

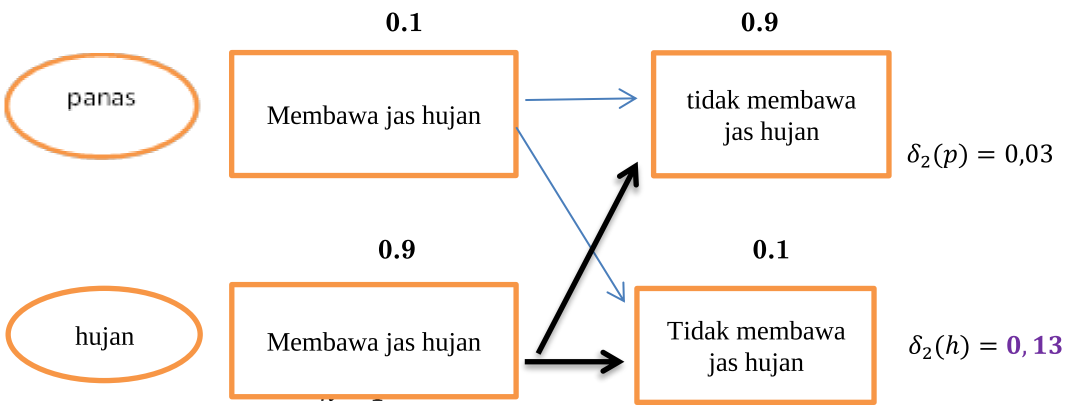

Diagram 3. Menemukan Barisan Cuaca dengan N = 2

c. Terminasi

Dari perhitungan secara keseluruhan, untuk mendapatkan barisan *state* yang optimal, dengan :

$$P^* = max[\delta_r(i)] = \delta_2(\text{hujan}) = 0{,}13$$

$$q_2^* = arg \max[\delta_2(\text{hujan})] = \text{hujan}$$

d. *Backtracing* (Barisan *State* Optimal)

Barisan *state* optimal dapat dirunut dari vector :

$$n = N - 1 = 1$$

$$q_t^* = \psi_{t+1}(q_t^*).\, t = T - 1, T - 2, \ldots, 1$$

$$q_1^* = \psi_2(q_2^*) = .\psi_2(\text{hujan})$$

Maka diperoleh barisan *state* yang optimal yaitu $Q = \{q_1^*, q_2^*\} = \{\text{hujan. hujan}\}$

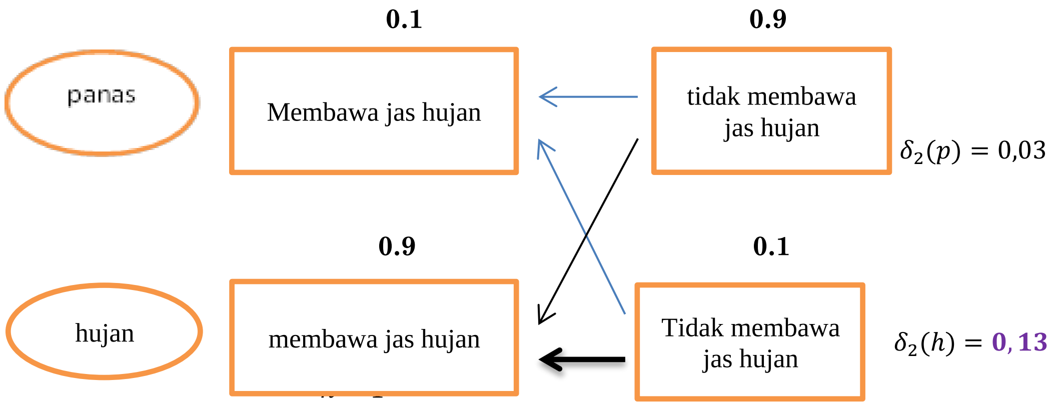

Diagram 4. Menemukan barisan cuaca optimal dengan *Backtracing*

4.Simpulan

Penelitian ini membahas teori dasar *Hidden Markov Model*, agar mudah dipahami maka dicari aplikasi yang sangat sederhana yaitu *state observation* dan *state hidden* yang masing masing hanya terdiri dari 2 *state* saja.

Hidden Markov Model, menggunakan parameter untuk mendapatkan informasi tentang *out-put* (hasil akhir) suatu masalah. Ada tiga hal yang menjadi masalah dalam HMM yaiitu, evaluasi, decoding dan learning.

Diperlukan pemahaman yang lebih baik terhadap teori HMM dan alat bantu penyelesaian masalah seperti mathlab, agar nantinya dapat menyelesaikan masalah yang lebih kompleks

Daftar Pustaka

[1] Barbara Resch, *Hidden Markov Model, A Tutorial For the Course Computational Intelligence* : http : // **www.igi.tugraz.at/lehre/CI**

[2] Prasetyo Budi, 2011, *Teori Dasar Hidden Markov Model*, Makalah Probabilitas dan Statistik,

[3] Phil Blunsom ,2004, *Hidden Markov Model*, **Pcb©cs.mu,oz.au,** .

[4] Rabiner, LR, Juang R.B, 1998, *An Introduction To Hidden Markov Modes, IEEE ASSP Magazine.*

[5] Ruchjana, B.N. *Rantai Markov (klasifikasi state),2016*, Diktat Kuliah, Universitas Padjajaran

[6] Sunji Osaki, 1992, *Applied Stochastic System Modeling, Springer*